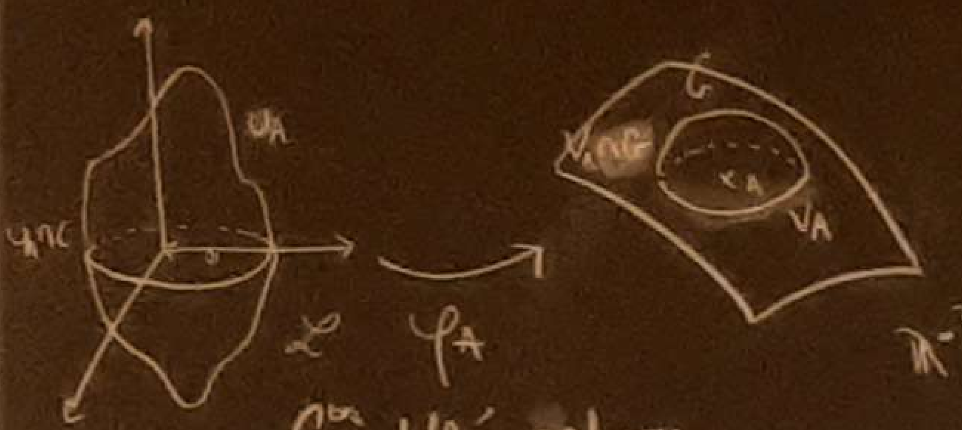
Prop Soit $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ fermé. Alors G est une sous-variété lisse de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Soit $A \in G$. On cherche :



C^∞-difféomorphisme

Comme G est un groupe, il suffit de trouver φ_{I_n}. Comme $t_A : M \longmapsto AM$ est un C^∞-difféo, on aura :

$$\varphi_A = t_A \circ \varphi_{I_n} \circ t_A^{-1}.$$

(1/2) Chercher $\mathcal{L}$

Posons $\mathcal{L} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}\ e^{tA} \in G\}$.

Montrons que $\mathcal{L}$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$.

* $0_n \in \mathcal{L}$;
* si $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}$, $\lambda A \in \mathcal{L}$;
* si $A, B \in \mathcal{L}$, $A + B \in \mathcal{L}$?

$\exp$ est diff$^{\text{ble}}$ en 0_n, avec :

$$\exp(0_n + H) = I_n + \underbrace{H}_{= d\exp_{0_n}(H)} + \underset{H \to 0}{o}(H)$$

Par TIL, $\exp$ induit un C^∞-difféo de $0_n \in U_0 \longrightarrow V_0 \ni \exp(0_n) = I_n$,

et, si l'on note $\mathrm{Log} : V_0 \to U_0$ la

réciproque, on a $\mathrm{Log}(I_n + H) = H + o(H)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big(\underbrace{e^{tA/k}}_{\in V_0} \underbrace{e^{tB/k}}_{\in V_0}\Big)^k = \Big(e^{\mathrm{Log}(e^{tA/k} e^{tB/k})}\Big)^k$$

à p.c.r. $\in G$

$$= e^{k \log(e^{tA/k} e^{tB/k})}$$

$$= e^{k \log((I_n + tA/k + o(1/k))(I_n + tB/k + o(1/k)))}$$

$$= e^{k \log(I_n + t\frac{A+B}{k} + o(1/k))}$$

$$= e^{k(\frac{t(A+B)}{k} + o(1/k))}$$

$$= e^{t(A+B) + o(1)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} e^{t(A+B)}.$$

$\in G$ ($k \to +\infty$)

Or G est fermé.

D'où le résultat.

(2/2) Expliciter le difféo

Soit $\mathcal{F}$ t.q. $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{F}$, et posons

$$\varphi : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{F} & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ L + F & \longmapsto & e^L e^F. \end{array}$$

Alors : $\varphi(0_n) = I_n$, φ est C^∞ et :

$$\varphi(0_n + H) = e^{H_L} e^{H_F}$$

$$= (I_n + H_L + o(H_L))(I_n + H_F + o(H_F))$$

$$= I_n + \underbrace{H_L + H_F}_{= H} + o(H)$$

donc par TIL induit un C^∞-difféo tel $\varphi : 0_n \in U \longrightarrow V \ni I_n$.

De plus $\varphi(\mathcal{L}) \subseteq G$ d'où $\varphi(U \cap \mathcal{L}) \subseteq V \cap G$.

Problème, on veut l'égalité.

Pour cela, réduire U.

Supposons par l'absurde que pour tout voisinage $0_n \in W \subseteq U$,

$$\varphi(\mathcal{L} \cap W) \subsetneq \varphi(W) \cap G$$

Soit $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de tels voisinages avec $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k = \{0_n\}$.

$Y_k \in \varphi(W_k) \cap G$

$= \varphi(X_k)$ où $X_k = L_k + F_k$, $F_k \neq 0_n$.

Alors $\exists\ \frac{F_k}{\|F_k\|} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} F \in \mathcal{F}$ quitte à extraire, car $\mathcal{F}$ est fermé, car de dimension finie.

On cherche une absurdité. Si $F \in \mathcal{L}$, on aura $F = 0$, mais $\|F\| = 1$, impossible.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Mq $e^{tF} \in G$.

$$e^{tF_k/\|F_k\|} = e^{\alpha_k F_k + \beta_k F_k} = (e^{F_k})^{\alpha_k} e^{\beta_k F_k}$$

où $\frac{t}{\|F_k\|} = \alpha_k + \beta_k$, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$, $\beta_k \in [0,1[$

et $e^{F_k} = \underbrace{e^{Y_k}}_{\substack{= Y_k \\ \in G}} \underbrace{e^{-L_k}}_{\in G} \in G$ par hypothèse

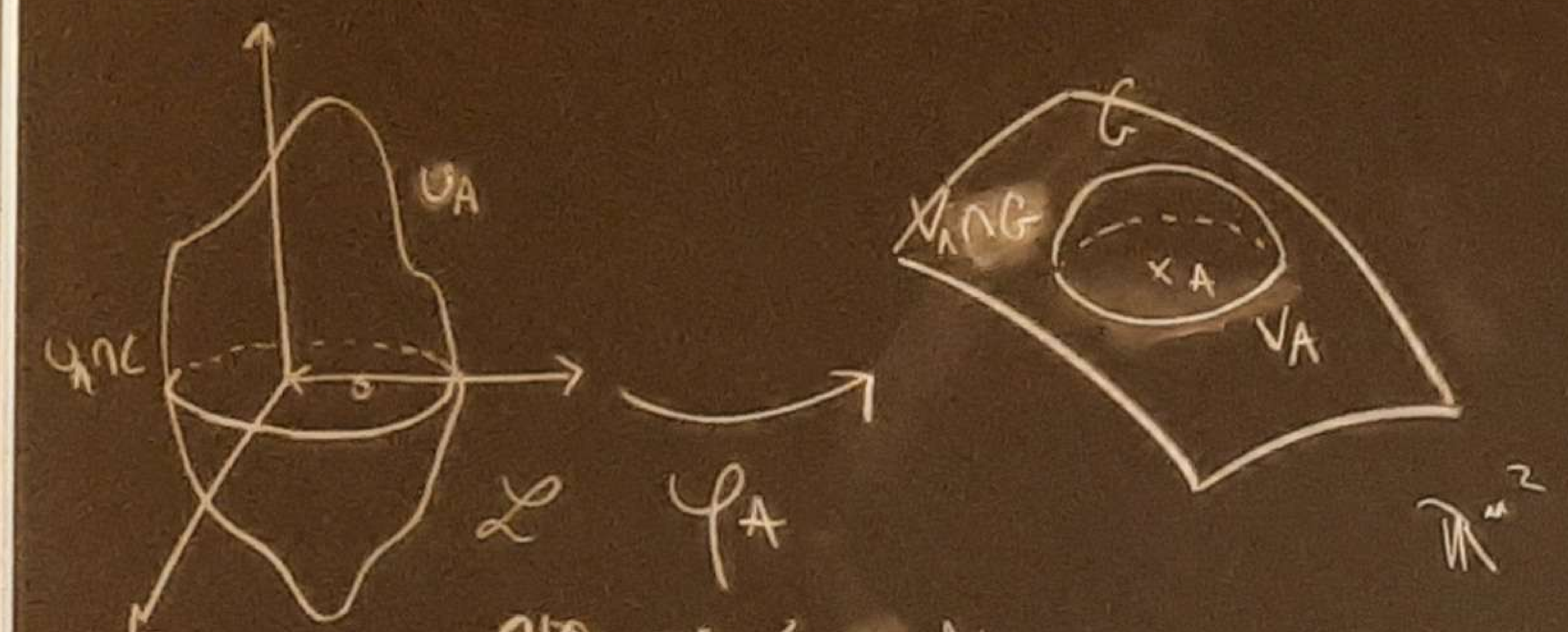
d'où $(e^{F_k})^{\alpha_k} \in G$,

et $e^{\beta_k F_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} I_n$, car (β_k) bornée, $F_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

d'où comme G est fermé, $e^{tF_k/\|F_k\|} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} e^{tF} \in G$ □

Prop Soit $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ fermé.
Alors G est une sous-variété lisse de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Soit $A \in G$. On cherche :



C^∞-difféomorphisme.

Comme G est un groupe, il suffit de trouver φ_{I_n}. Comme $t_A : M \longmapsto AM$ est un C^∞-difféo, on aura :

$$\varphi_A = t_A \circ \varphi_{I_n} \circ t_A^{-1}.$$

(1/2) Chercher $\mathcal{L}$

Posons $\mathcal{L} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} \in G\}$.

Montrons que $\mathcal{L}$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$.

* $0_n \in \mathcal{L}$;
* Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}$, $\lambda A \in \mathcal{L}$;
* Si $A, B \in \mathcal{L}$, $A + B \in \mathcal{L}$?

exp est diff^{ble} en 0_n, avec

$$\exp(0_n + H) = I_n + \underbrace{H}_{= d\exp_{0_n}(H)} + o(H) \quad (H \to 0)$$

Par TIL, exp induit un C^∞-difféo de $0_n \in U_0 \longrightarrow V_0$ ($\exp(0_n) = I_n$),

et, si l'on note $\mathrm{Log} : V_0 \to U_0$ la

Réciproque, on a $\mathrm{Log}(I_n + H) = H + o(H)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big(\underbrace{e^{tA/k}}_{\in V_0}\underbrace{e^{tB/k}}_{\in V_0}\Big)^k = \Big(e^{\mathrm{Log}(e^{tA/k} e^{tB/k})}\Big)^k$$
$$= e^{k\,\mathrm{Log}(e^{tA/k} e^{tB/k})}$$
$$= e^{k\,\mathrm{Log}\left(\left(I_n + tA/k + o(1/k)\right)\left(I_n + tB/k + o(1/k)\right)\right)}$$
$$= e^{k\,\mathrm{Log}\left(I_n + t\frac{A+B}{k} + o(1/k)\right)}$$
$$= e^{k\left(\frac{t(A+B)}{k} + o(1/k)\right)}$$
$$= e^{t(A+B) + o(1)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} e^{t(A+B)}.$$

$\in G$ à partir d'un certain rang ; $k \to +\infty$; $\in G$

Car G est fermé.

D'où le résultat.

$A + o(H)$.

$\Big)\Big)^k$

$\Big)$

$/k)\Big)\left(I_n + {}^{tB}/_k + o(1/k)\right)$

$+\, o(1/k)\Big)$

$\to e^{t(A+B)}$.

∞

(2/2) Expliciter le difféo

Soit $\mathcal{F}$ t.q. $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{F}$, et posons

$$\varphi : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{F} & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ L + F & \longmapsto & e^L e^F \end{array}$$

Alors : $\varphi(0_n) = I_n$, φ est C^∞ et :

$$\varphi(0_n + H) = e^{H_L} e^{H_F}$$
$$= \left(I_n + H_L + o(H_L)\right)\left(I_n + H_F + o(H_F)\right)$$
$$= I_n + \underbrace{H_L + H_F}_{=H} + o(H)$$

donc par TIL, induit un C^∞ difféo local

$$\varphi : \underset{0_n}{U \ni} \longrightarrow \underset{I_n}{V \ni}$$

De plus $\varphi(\mathcal{L}) \subseteq G$ d'où

$$\varphi(U \cap \mathcal{L}) \subseteq V \cap G.$$

Problème, on veut l'égalité.

Pour cela, réduire U.

Supposons par l'absurde que pour tout voisinage $\underset{0_n}{\ni} W \subseteq U$,

$$\varphi(\mathcal{L} \cap W) \subsetneq \varphi(W) \cap G$$

Soit $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de tels voisinages avec $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k = \{0_n\}$.

$$Y_k \in \varphi(W_k) \cap G$$
$$= \varphi(X_k) \text{ où } X_k = L_k + F_k,\ F_k \neq 0_n.$$

Alors $\dfrac{F_k}{\|F_k\|} \xrightarrow[k \to +\infty]{} F \in \mathcal{F}$

quitte à extraire car $\mathcal{F}$ est fermé, car de dimension finie.

On cherche une absurdité. Si $F \in \mathcal{L}$, on aura $F = 0$, mais $\|F\| = 1$, impossible.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Mq $e^{tF} \in G$.

$$e^{tF_k/\|F_k\|} = e^{e_k F_k + f_k F_k} = \left(e^{F_k}\right)^{e_k} e^{f_k F_k}$$

où $\dfrac{t}{\|F_k\|} = \underset{\in \mathbb{Z}}{e_k} + \underset{\in [0,1[}{f_k}$

et $e^{F_k} = \underbrace{e^{X_k}}_{\substack{= Y_k \\ \in G}} \underbrace{e^{-L_k}}_{\in G} \in G$ par hypothèse

d'où $\left(e^{F_k}\right)^{e_k} \in G$,

et $e^{f_k F_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} I_n$, car (f_k) bornée, $\underset{W_k}{\in} F_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$,

d'où comme G est fermé, $e^{tF_k/\|F_k\|} \xrightarrow[k \to +\infty]{} e^{tF} \in G$ $\square$